Théorie du point fixe & Systèmes formels

D.E ZEGOUR
École Supérieure d'Informatique
ESI

Théorie du point fixe

Domaines

Il existe plusieurs contextes de la théorie du point fixe

Dépend de l'ensemble considéré

- Ensemble des réels : $f(x) = x$
- Ensembles des treillis (Knaster-Tarski)
- Etc.

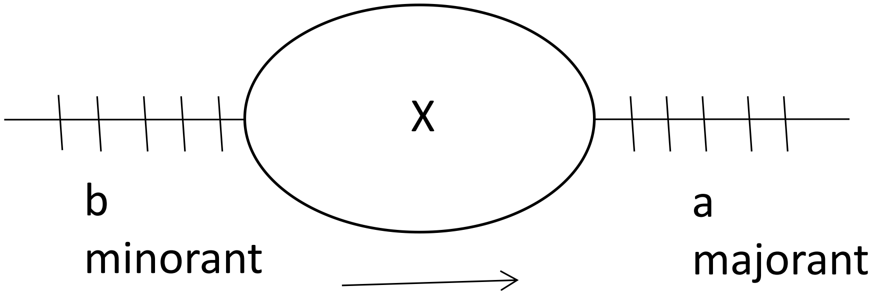
Théorie du point fixe

Sommaire

1. Rappel
   - Ensemble ordonné
   - Majorant, Minorant
   - Borne inférieure
   - Borne supérieure
   - Treillis
   - Treillis complet
   - Fonction croissante
   - Fonction continue

2. Théorème du point fixe
   - Énoncé
   - Démonstration

Théorie du point fixe



Rappel

Ensemble ordonné

Soit E un ensemble, R une relation binaire sur E.

E est ordonné par R si

- R est <u>réflexive</u> : si x est élément de E, xRx
- R est <u>antisymétrique</u> : si xRy et yRx, alors x=y
- R est <u>transitive</u> : si xRy et yRz, alors xRz

Notation : (E, ≤)

Majorant / Minorant d'une part*ie d'un ensemble*

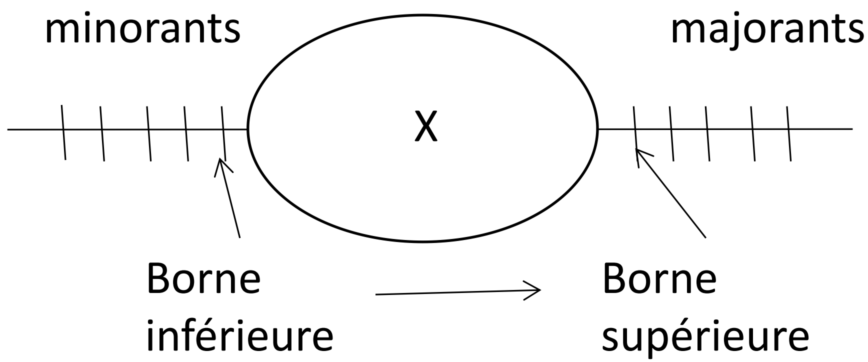
Soient

- E un ensemble ordonné par la relation <= et,
- X une partie de E .

a dans E est majorant de X ,si quelque soit x dans X, on a x≤a.

b dans E est minorant de X , si quelque soit x dans X, on a b≤x.

Théorie du point fixe



Rappel

Borne inférieure de X (incls dans E ordonné)

Le plus grand élément (s'il existe) des minorants de X.

Notation: INF X

Borne supérieure de X (inclu dans E ordonné)

Le plus petit élément (s'il existe) des majorants de X.

Notation: SUP X

Théorie du point fixe

Rappel

Treillis

Ensemble ordonné dans lequel *tout sous ensemble de deux éléments {x,y}* a une borne inférieure et une borne supérieure.

Treillis complet (ensemble ordonné inductif).

Un treillis (E,≤) est dit complet si *toute partie A de E* admet une borne supérieure et une borne inférieure. E admet un plus grand élément et un plus petit élément.

Théorie du point fixe

Rappel

Fonction croissante

Soit (E,$\leq$) et(F,$\leq$) deux ensembles ordonnées

Une fonction f de E dans F est dite croissante si pour tout couple (x,y) de E on a:

$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

Fonction continue

Soit (E,≤) et(F,≤) deux treillis complets et f une application de E dans F.

f est continue si pour toute suite croissante [xn , n dans N] d'éléments de E

f(SUP[xn , n dans N]) = SUP [f(xn) , n dans N]

L'image de la borne supérieure de A=[x1,x2,...xn] par f est egale a la borne supérieure de f(A)=[f(x1),f(x2),..,f(xn)]

f(SUP A) = SUP f(A)

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Énoncé

Soient (E, $\leq$) un Treillis complet et F une fonction de E dans E .

Partie 1 :

Si F est croissante. alors il existe une solution minimale x0 à l'équation F(x) = x.

c.a.d. x0 est solution et toute autre solution y est telle que x0 $\leq$ y.

Partie 2 :

Si de plus, F est continue

x0 = Limite de $F^n(bi)$, n tend vers ∞

bi étant la borne inférieure de E.

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe :
Démonstration première partie

Soit A une partie de E définie comme suit:

A=[y dans E tel que $f(y) \leq y$]

Soit $x0$ = INF A la borne inférieure de A qui existe toujours puisque E est un treillis.

Quelque soit y de A on a : $x0 \leq y$

On a l' implication suivante :

$x0 \leq y \implies f(x0) \leq f(y)$ puisque f est croissante.

Comme $f(y) \leq y$ on a, à fortiori $f(x0) \leq y$
De cette relation, on déduit que $f(x0)$ est un minorant.
Comme $x0$ est le plus grand des minorants de A (borne inférieure), on a:
$f(x0) \leq x0$ (1) Ceci d'une part.
D'autre part:
$f(x0) \leq x0$
$f(f(x0)) \leq f(x0)$ (f croissante)
Cette dernière relation est de la forme $f(y) \leq y$
Ce qui signifie que $f(x0)$ est dans A.
C'est à dire $x0 \leq f(x0)$ (2)
De (1) et (2) : $x0 = f(x0)$

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Conséquence première partie

Si y0 est tel que f(y0) = y0 alors y0 appartient à A (par définition de A).

Comme x0 est la solution minimale, $x0 \leq y0$

En d'autres termes, si y0 est solution de l'équation f(x) = x, alors cette solution est supérieure ou egale à la solution minimale x0 = INF A.

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe :Démonstration deuxième partie

bi étant la borne inférieure de E ($bi = INF\ E$), $x0 = INFA$ on a :

$bi \leq x0$

$f(bi) \leq f(x0)$ puisque f est croissante

Comme $f(x0) = x0$, on déduit que $f(bi) \leq x0$ (3)

De même, puisque f est croissante (3) implique:

$f(f(bi)) \leq f(x0)$

$f^2(bi) \leq x0$ ($f(x0) = x0$)

Et par récurrence,

quelque soit n dans N:

$f^n(bi) \leq x0$

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Démonstration deuxième partie

La suite bi, f(bi), (f(bi)), ... est croissante. En effet,

bi $\leq$ f(bi) $\leq$ f(f(bi)) $\leq$ ...

Car bi est le plus petit élément de E.

Cette suite admet aussi une borne supérieure notée SUP [f^n(bi), n dans N] du fait que c'est une partie de E.

En plus,

SUP[f^n(bi) n dans N] $\leq$ x0 (4) (x0 est un majorant)

Et d'autre part, d'après le théorème de la continuité, on a :

f(SUP [f^n(bi), n dans N]) = SUP[f^{n+1}(bi), n dans N]

= SUP[f^n(bi), n dans N]

Théorie du point fixe

Théorème du point Fixe : Démonstration deuxième partie

C'est de la forme $f(x) = x$,

on conclut que:

SUP[$f^n(bi)$, n dans N] appartient à A, et par conséquent on a:

$x0 \leq$ SUP[$f^n(bi)$ n dans N] (5)

Ce qui nous permet de conclure de (4) et (5) :

$$x0 = \text{SUP}[\ f^n(bi),\ n \text{ dans } N\ ] = \lim_{n \to \infty} f^n(bi)$$

Systèmes formels

Sommaire

1. Définition d'un système formel (SF)
   - Morphologie
   - Théorie propre
   - Classes d'un SF
   - Classes données
   - Classes construites
2. Décidabilité des SF
3. Restrictions
4. Exemples de SF
5. Quelques SF
   - Système relationnel
   - Système logique
   - Système applicatif
6. Réduction

Systèmes formels

Définition

Un système formel = { Règles }

Les regles spécifient des ensembles

{ Objets }

{ Enoncés élémentaires }

Morphologie du système

{ Théorèmes= Enoncés élémentaires vrais }.

Théorie propre du système

Systèmes formels

Théorie propre

Théorie propre du système énonce les axiomes et les règles déductives

Axiomes = Règles élémentaires qui sont vraies sans démonstration.

Règles déductives : montrent comment les théorèmes dérivent à partir des axiomes par application des règles.

Systèmes formels

Théorie propre (Autre définition)

Théorie propre = S = (A, R, W)

A : ensemble des axiomes

R : ensemble des règles.

W : ensemble des formules bien formées.

Une règle : application de W^n dans W, ou n est l'arité de la règle.

Théorèmes de S = A U W

Ou bien

Théorèmes : $A^+ = \bigcup A_i, i \geq 0$

tel que

$A_0 = A$,

$A_i = A_{i-1} \cup$ { les images des éléments de A_{i-1} générés par les règles},

pour $i \geq 1$

Systèmes formels

Classes

Dans un système formel on définit la notion de classe.

Classes simples : atomes , objets, ...

Autres classes : énoncés élémentaires, les axiomes, les différentes règles et les théorèmes

On distingue :

Les classes données : atomes, opérations, prédicats, axiomes, règles

Les classes construites : énoncés élémentaires, théorèmes élémentaires

On s'intéresse plus particulièrement aux classes construites.

Systèmes formels

Classes construites

Définition inductive :

1- Certains éléments initiaux sont spécifiés : Spécifications initiales

2- Certaines procédures de construction de nouveaux éléments à partir d'éléments initiaux sont décrites : Principes de génération

Nouveaux éléments: Spécifications finales

Systèmes formels

Décidabilité

Classe définie : Il existe un algorithme(définition inductive) qui détermine(décide) si une entitée donnée appartient ou non à la classe.

Système formel décidable : classe des théorèmes est définie

Restrictions à imposer à un système formel

Partie morphologique : complètement définie.

Théorie propre : on n'exige pas que la classe des théorèmes élémentaires soit définie.

Systèmes formels

Exemple de système formel

Théorie élémentaire des numéraux notée N.

Objets élémentaires : O, O', O'', ... (zéro, le successeur de zéro, le successeur du successeur de zéro, ...)

Enoncés élémentaires : équations entre les objets

(exemple O = O, O' = O'', ...)

Théorie propre:
Axiome :O = O
Règle de dérivation : " Si deux objets sont égaux, leurs successeurs sont égaux".

->
Théorème élémentaires :

O' = O',
O'' = O'',
....

Systèmes formels

Exemple de système formel

Théorie élémentaire des numéraux notée N : définition formelle :

a) Objets

- un objet primitif : O
- une opération unaire : '
- une règle de formation d'objets :

Si x est un objet, alors x' est un objet.

b) Énoncés élémentaires

- un prédicat binaire : =
- une règle de formation d'énoncés élémentaires :

Si x et y sont des objets, alors x = y est un énoncé élémentaire.

c) Théorèmes élémentaires

- un axiome : O = O
- une règle de déduction :

Si x=y alors x'=y'

Systèmes formels

Exemple de système formel : MUI

- Objets élémentaires (Alphabet): {M, I, U}
- énoncé élémentaires : Toutes les chaines de $\{M, I, U\}^+$
- Théorie propre (x et y dans {M, I, U}*)

--> MI (Axiome)

xI --> xIU (Règle 1) : ajouter U à la fin de toute chaine se terminant par I

Mx --> Mxx (Règle 2) : doubler la chaine après le M

xIIIy --> xUy (Règle 3) : remplacer III par U

xUUy --> xy (Règle 4) :supprimer UU

(1)	MI	Axiome
(2)	MII	De (1) par règle 2
(3)	MIIII	De (2) par règle 2
(4)	MIIIIU	De (3) par règle 1
(5)	MUIU	De (4) par règle 3
(6)	MUIUUIU	De (5) par règle 2
(7)	MUIIU	De (6) par règle 4

Théorèmes : MI, MII, MIIII, MIIIIU, MUIU, MUIUUIU, MUIIU

Montrer que MIU, MIUIUIUIU, MUIIIIU sont des théorèmes

MU est-il un théorème ?

Systèmes formels

Quelques systèmes formels

Systèmes relationnels

Enonces élémentaires formés uniquement avec des prédicats binaires (relation entre deux objets)

Si le prédicat est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive), le système est dit système équationnel.

Systèmes logiques

Enonces élémentaires formés uniquement avec des prédicats unaires.

Systèmes applicatifs

Enonces élémentaires formés uniquement avec l'opération d'application(juxtaposition).

S'il possède en plus d'autres opérations, il est dit système quasi-applicatif.

Systèmes formels

Réduction

On peut accomplir une réduction à un système formel avec une seule opération binaire : l'application.

On introduit dans le système de nouveaux objets correspondant aux opérations originales.

Ainsi abcd sera interprété comme (((ab)c)d)

A l'opération f(a1, a2, ...,an) on associe l'atome F. on aura donc Fa1a2....an et ainsi on élimine f.

a+b sera représenté par Aab

Le système N des numéraux devient applicatif en remplaçant ' par S et = par Q. x' sera noté Sx et x=y sera noté Qxy