Complexité 2

D.E ZEGOUR
École Supérieure d'Informatique
ESI

Complexité

Sommaire

Classes de complexité

- Temps
- Espace

Introduction

On s'intéresse aux ressources nécessaires pour la résolution de problèmes.

Les ressources essentielles sont le temps et l'espace.

On ne considère ici que des problèmes de décisions

On suppose donc que toutes les machines de Turing (MT) considérées s'arrêtent toujours.

On définit le temps (et espace)de calcul relativement aux machines de Turing

Complexité / Classes

Classes de complexité

TIME(t(n)) = { L | L peut être décidé en temps t(n) par une machine de Turing déterministe }

NTIME(t(n)) = { L | L peut être décidé en temps t(n) par une machine de Turing non déterministe }

Classes importantes : celles des problèmes qui peuvent être résolus en temps polynomial par une machine de Turing

Complexité / Classes

Classes P , NP et EXP

Classe P : La classe des problèmes qui peuvent être résolus en temps polynomial par une machine déterministe

$$P = \text{Time}(\ O(p(n))\ )\ ,\ p(n) = n^k$$

Classe NP : classe des problèmes qui peuvent être résolus en temps polynomial par une machine non déterministe.

$$NP = \text{NTime}(\ O(p(n))\ ),\ p(n) = n^k$$

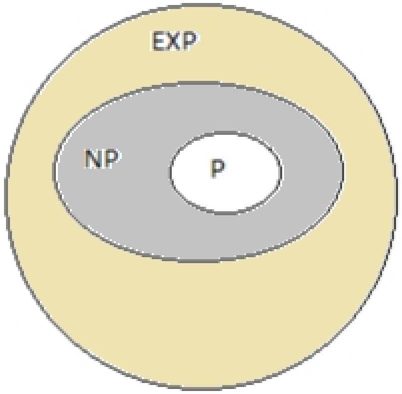
Classe EXP : classe des problèmes qui peuvent être résolus en temps exponentiel par une machine déterministe.

$$EXP = \text{Time}(O\ (2^{p(n)})\ ),\ p(n) = n^k$$

Complexité / Classes

Classes P , NP et EXP

$P \subseteq NP \subseteq EXP$



NP ne signifie pas "non polynomial"
(Mais polynomial non-déterministe)

La question P=NP ?

La question P=NP ? reste encore ouverte .
(un problème ouvert extrêmement difficile)

Question posée en 1970

1 million de dollars à gagner !
(*voir http ://www.claymath.org/prize problems).*

Complexité / Classes

Problèmes dans P

Ce sont tous les problèmes que l'on peut résoudre sur une machine réelle (en temps polynomial)

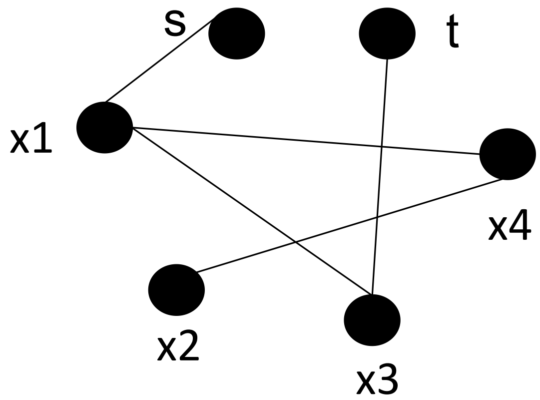
- Est-ce que A est le PGCD de deux entiers B et C ?

- Est-ce qu'un tableau est trié ?.

- Etant donné une matrice A (n X n) et un vecteur b, Existe t-il un vecteur x tel que Ax = b? (Système de Cramer)

- GAP : Problème d'Accessibilié dans un Graphe : existe t-il un chemin de s à t dans un graphe ?

Complexité / Classes



s	*
x1	*
x2	
x3	*
x4	*
t	*

s	*
x1	*
x2	*
x3	*
x4	*
t	*

Problèmes dans P (GAP)

Accessibilité dans un graphe

Instance: soit G = (V, E) un graphe non orienté, deux sommets s et t

Question : *Est-ce qu'un graphe G donné contient un chemin de s à t ?*

Algorithme polynomial

1. Marquer noeud s;

3. Repeter

    Pour tout noeud b dans G

        S'il existe un arc (a, b) tel que a est marqué

        Alors Marquer b

    Fpour

   Jusqu'à ce que aucun noeud ne soit marqué

4. Si t est marqué, Accepter sinon Rejeter

Complexité

O(m^2), m : nombre de noeuds

Complexité / Classes

Problèmes dans NP

Ce sont tous les problèmes de P

P $\subseteq$ NP : car si un probleme est résolu en $O(n^k)$ alors une solution est aussi verifiable en $O(n^k)$ en déroulant le programme

Caractéristique principal:
Il existe un vérificateur (algorithme) polynomial permettant de vérifier une solution

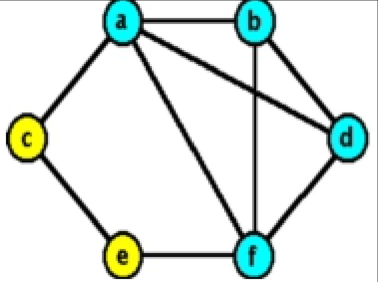
Exemple : problème du GAP
GAP est dans NP

On peut appliquer un parcours en largeur, mais de complexité $O(b^d)$ en temps et espace, b: degré maximal et d : profondeur

Il existe un algorithme polynomial qui vérifie si une séquence de noeuds forme un chemin d'un noeud s donné vers un noeud t donné.

GAP appartient donc à la classe NP

Complexité / Classes



Exemple de problèmes dans NP

Clique dans un graphe

Instance: soit G = (V, E) un graphe non orienté (V: ensemble des nœuds; E:ensemble des arcs) et soit k un entier positif k≤n.

Question: Est-ce que G contient une clique de longueur k?

Une clique de longueur k est un sous ensemble W de V tel que :

- le cardinal de W est K
- pour chaque paire distincte {u, v} de nœuds dans W, {u,v} est un arc de G

(2 sommets quelconques de W sont joints par une arête)

Complexité / Classes

Exemple de problèmes dans NP

Clique dans un graphe

Algorithme non déterministe :

- Choisir de façon non déterministe k sommets $v_1, \ldots, v_k$ de G.

- Vérifie que les toutes les arêtes (v_i, v_j) pour tout $1 \leq i < j \leq k$ sont présentes dans G
(accepté si c'est le cas. $(O(k^2))$)

Le problème de la clique appartient donc à la classe NP.

Complexité / Classes

Autre exemple de problèmes dans NP

Système d'équation linéaires

Problème : *Etant donné un système d'équation linéaires Ax = b,*

A : matrice m X n ; x et b vecteur de taille m

(m equations, n inconnues, m > n)

Trouver une solution x (si elle existe) qui satisfait les équations.

Le problème est NP car si on se donne une solution, on peut vérifier que Ax = b (remplacer x par la solution et vérifier chaque équation)

Complexité / Classes

Autre exemple de problèmes dans NP

SAT

Problème : *Etant donné n variables Booléennes $x_1, x_2, ..., x_N$ et une formule de la logique, Existe-il une affectation de valeurs Vrai et Faux aux variables qui rend la formule satisfiable, c.-à-d.., Vrai?*

Exemple :

$$(x_1' + x_2 + x_3)\ (x_1 + x_2' + x_3)\ (x_2 + x_3)\ (x_1' + x_2' + x_3')$$

Etant donné une affectation aux variables x_1, x_2, .. on peut vérifier si c'est un certificat (preuve).

Réponse OUI pour (x1, x2, x3) = (Vrai, Vrai, Faux)

Complexité / Classes

Autre exemple de problèmes dans NP

3-SAT

Problème :

Etant donné n variables Booléennes $x_1, x_2, ..., x_N$ et une formule de la logique en forme normale conjonctive (produit de sommes) avec exactement 3 littéraux différent par clause,

Existe-il une affectation de valeurs Vrai et Faux aux variables qui rend la formule satisfiable, c.-à-d.., Vrai?

Complexité / Classes

Autre exemple de problèmes dans NP

Subset Sum

Problème : *Etant donne un ensemble de n entiers.*
Existe-il un sous ensemble dont la somme de ses éléments est égal à B?

Exemple : {4, 5, 8, 13, 15, 24, 33} et B = 36.

On peut vérifier si un sous ensemble donné satisfait la condition

Réponse OUI pour { 4, 8, 24} .

Complexité / Classes

Autre exemple de problèmes dans NP

Partition

Problème : *Etant donné un ensemble de n entiers, peut-on le partitionner en deux classes de même somme ?*

Exemple :   {4, 5, 8, 13, 15, 24, 33}.

Il existe un vérificateur pour deux classes données.

Réponse OUI pour {5, 13, 33} et {4, 8, 15, 24}

Complexité / Classes

Autre exemple de problèmes dans NP

Sudoku

Problème : *Etant donné une matrice 9X9 composée de 9 Sous-matrices 3X3.*

	7						5	
		3	1	5	2	8	6	7
6	5	8						4
		6	5	9	8			
	8						9	
			7	2	4	6		
8						2	4	6
1	6	7	2	4	5	9		
	4						7	

Existe t-il un remplissage avec les contraintes suivantes:

- *un seul chiffre par ligne*
- *un seul chiffre par colonne*
- *un seul chiffre dans chaque sous matrice 3X3*

Complexité / Classes

Propriétés des problèmes NP

2 parties:

- Choisir de façon non déterministe un objet
- Vérifie que cet objet satisfait une certaine propriété

La vérification se fait en temps polynomial

Un langage L est dans la classe NP si et seulement si il existe un vérificateur en temps polynomial pour L.

Complexité / Classes

Problèmes dans EXP

Classe EXP : classe des problèmes qui peuvent être résolus en temps exponentiel par une machine déterministe.

EXP = Time(O ($2^{p(n)}$)), $p(n) = n^k$

NP ⊆ EXP

Essayez tous les cas possibles.

- Si l'un d'entre eux peut être vérifié comme étant correct, acceptez Sinon rejetez

- Le nombre de cas à tester est exponentiel et chaque test est vérifié en temps polynomial

Complexité / Classes

Autre problème dans EXP (dans P et NP)

Exemple : *(GAP)*

Accessibilité dans un graphe

Instance: soit G = (V, E) un graphe non orienté, deux sommets s et t

Question : Est-ce qu'un graphe G donné contient un chemin de s à t ?

On peut appliquer un parcours en largeur

mais de complexité $O(b^n)$

b: degré maximal et n : profondeur

Complexité / Classes

Autre problème dans EXP (dans NP)

Exemple : ***Subset Sum***

Etant donne un ensemble de n entiers.

Existe-il un sous ensemble dont la somme de ses éléments est égal à B?

Il existe 2^n parties possibles

Algorithme déterministe :
Réponse <- Non
<u>Répeter</u>
    Générer un sous ensemble e
    Vérifier -> Réponse (oui/Non)
<u>Jusqu'à</u> réponse = Oui) OU e ={}
Afficher (Réponse)

Complexité / Classes

Autre problème dans EXP (non dans NP)

Jeu d'échec *(version généralisée)*

- 2 joueurs
- placent à tour de rôle des pièces (noires et blanches) sur un plateau de nXn cases et de 4Xn pièces (2Xn pour chacun des deux joueurs).

But : Le jeu consiste à mettre l'autre joueur échec et mat,

(Roi est en prise et aucun coup pour le secourir)

(Arbre de jeu couvre 10^{120} parties plausibles pour n=8)

La durée du jeu (nombre de coups) est exponentielle en la taille de l'échiquier.

Complexité / Classes

Autre problème dans EXP (non dans NP)

Jeu du Go *(version généralisée)*

- 2 joueurs
- placent à tour de rôle des pierres (noires et blanches) sur les intersections d'un tablier (n X n)

But : bâtir des « territoires ».

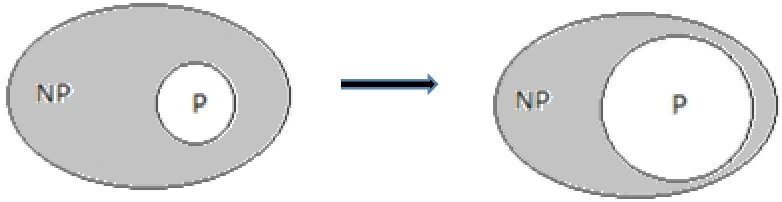
Les pierres encerclées sont des « prisonniers »,

Gagnant : celui qui totalise le plus de territoires et de prisonniers

(Arbre de jeu couvre 10^{600} parties plausibles pour n=19)

La durée du jeu (nombre de coups) est exponentielle en la taille du tablier.

Complexité / Classes



Question P = NP ?

Evidence : P est inclus dans NP

Au fil des temps, des problèmes NP peuvent devenir P et d'autres nouveaux problèmes NP peuvent apparaître.

En 2002, des chercheurs indiens ont prouvé que le test de primalité (supposé longtemps dans NP) est dans P : $O(n^{12})$ puis amélioré en $O(n^6)$

Est-ce que tout problème avec solution vérifiable polynomialement peut aussi être résolu polynomialement ?

Trouver une solution est-il aussi facile que la vérifier ?

Complexité / Classes

Complexité en espace

Espace mémoire (dynamique) utilisé par un algorithme.

Exemple : Pour un parcours en largeur, on a besoin d’une file d’attente pour sauvegarder les noeuds du niveau antérieur.

Se placer dans le cas le plus défavorable (Utilisation de la O-notation)

Pour la machine de Turing, l'espace désigne le nombre de cases visitées pendant le calcul (C'est aussi la longueur maximale d'une configuration de la machine).

Complexité / Classes

Classes de complexité en espace

L : classe des problèmes résolus en espace logarithmique sur une machine déterministe

NL : classe des problèmes résolus en espace logarithmique sur une machine non-déterministe

PSPACE : classe des problèmes résolus en espace polynomial sur une machine déterministe.

NPSPACE : classe des problèmes résolus en espace polynomial sur une machine non déterministe

EXPSPACE : classe des problèmes résolus en espace exponentiel surune machine déterministe

NEXPSPACE : la classe des problèmes résolus en espace exponentiel sur une machine non déterministe

Complexité / Classes

Classes de complexité en espace

Théorème de Savitch

Soit s une fonction de N dans R^+ telle que $s(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$.
Une machine non déterministe qui fonctionne en espace s(n) est équivalente à une machine déterministe qui fonctionne en espace $O(s^2(n))$.

(Rappel : Pour la complexité en temps, le passage d'une machine non déterministe à une machine déterministe se fait de manière exponentielle)

Il relie les classes déterministes et non-déterministes

NSPACE = PSPACE

NEXPSPACE = EXPSPACE

Complexité / Classes

Problèmes ouverts:

P = NP ?
L = NL ?
L = P ?
P = Pspace ?
NP = Pspace ?
Exp = NExp ?

Classes de complexité (Synthèse)