Examen TPGO 2022-2023 **-- 2Heures -- Doc. non autorisés**

I. Conception de programmes

Considérer le problème des cruches d'eau défini comme suit:

Soient 2 cruches d'eau A et B, l'une de capacité m litres et l'autre n litres. Nous devons mesurer d litres dans l'une des deux cruches avec les opérations suivants((X,Y) désigne les contenus courants des cruches A et B ; (0, 0) étant la configuration initiale):

1. (X,Y) -> (0, Y) [Vider A]
2. (X,Y) -> (X, 0) [Vider B]
3. (X,Y) -> (m, Y) [Remplir A]
4. (X,Y) -> (X, n) [Remplir B]
5. (X,Y) -> (X-e, Y+e) [Verser de A dans B jusqu'à ce que A ou B est soit vide soit remplie]
6. (Y,X) -> (Y-e, X+e) [Verser de B dans A jusqu'à ce que A ou B est soit vide soit remplie]

Donner une solution (pseudo algorithme) avec DFS (Depht First Search) et une autre avec BFS (Breadh First Search). Faire préalablement une trace pour m=4; n=3;d=2

II. Complexité

1. Donner un pseudo-algorithme qui colore un graphe avec 2 couleurs.
2. Démontrer qu'un graphe 2-COLOR se réduit polynomialement à 2-SAT. En déduire qu'il est dans P.

N.B :

- Un graphe 2-color est coloré avec uniquement 2 couleurs et est tel que deux noeuds adjacents sont de couleurs différentes.
- 2-SAT est une formule de la logique propositionnelle exprimée sous forme d'un produit de sommes (forme conjonctive). Chaque somme est composée exactement de deux variables.
- 2-SAT est dans P.

III. Construction de programmes

1. Soit à prouver le programme suivant en utilisant les règles de Hoare:

$\{X = 0 \land Y = 1 \land Z = 1 \land 1 \leq N \land N = n\}$ ($\land$ désigne le ET logique)

TQ (Z < N) Y := X + Y ; X := Y − X; Z := Z + 1 FTQ

$\{Y = fib(n)\}$

Dresser l'arbre de preuve.

Montrer que $I \equiv (Y = fib(Z)) \land (X = fib(Z - 1))$ est un invariant de boucle.

Établir la preuve.

Rappel : Règle de l'itération(répétitive)

(E & B) { P } E
--(ITE)
E { TQ B : P FTQ } (E & Non B)

2. Évaluez les lambda-expressions suivantes:
1. (λ x. (x+y)) 3
2. (λ f. λ x. f (f x)) (λ y. y+1)
3. λ x. (λ y. y x) (λ z. x z)
4. (λ x. (λ y. y x) (λ z. x z)) (λ y. y y)

Rappelez la définition de variables libres et liées d'une Lambda-expression, puis trouvez les variables libres et liées de l'expression suivante:
(λ f. λ x. f (f x)) (λ y. y+x).

Calculer (λ f. λ x. f (f x)) (λ y. y+x)

3. Soit le programme Prolog suivant:
Element (X, Y) : vrai si X est dans la liste Y
Sous-ensemble(L1,L2) : vrai si tous les éléments de la liste L1 font partie de la liste L2.

```
Element(X,[X|_]).
Element(X,[_|R]) :- Element(X,R).
Sous-ensemble([],_).
Sous-ensemble([X|R],L) :- Element(X,L), Sous-ensemble(R,L).
```

Donner le fonctionnement du démonstrateur pour les questions suivantes:
- sous-ensemble([1,2,8],[1,3,5,2,8])
- sous-ensemble(X,[1,3,5,2,8]).