Les arbres AVL

D.E ZEGOUR

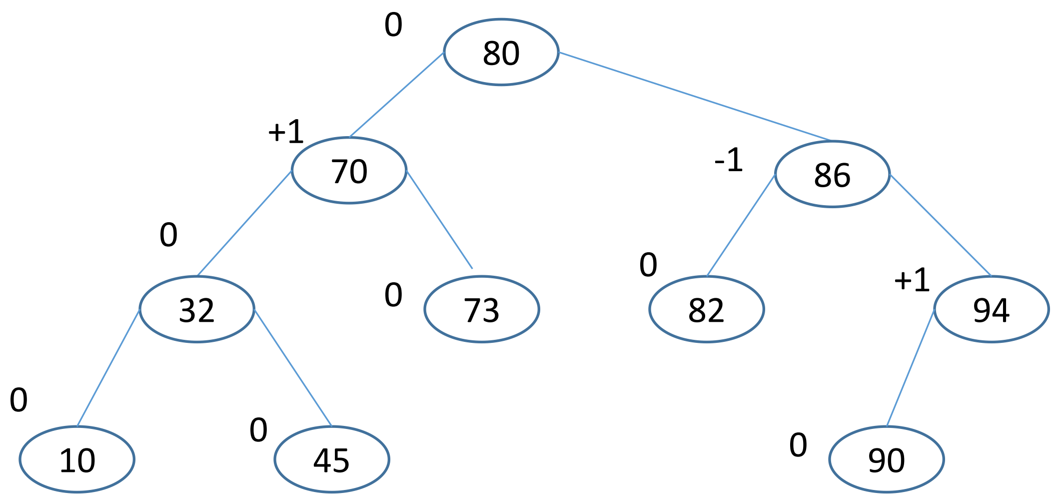
Ecole Supérieure d'Informatique

ESI

Les arbres AVL

Définition

Un *arbre AVL* est un *arbre de recherche binaire équilibré*



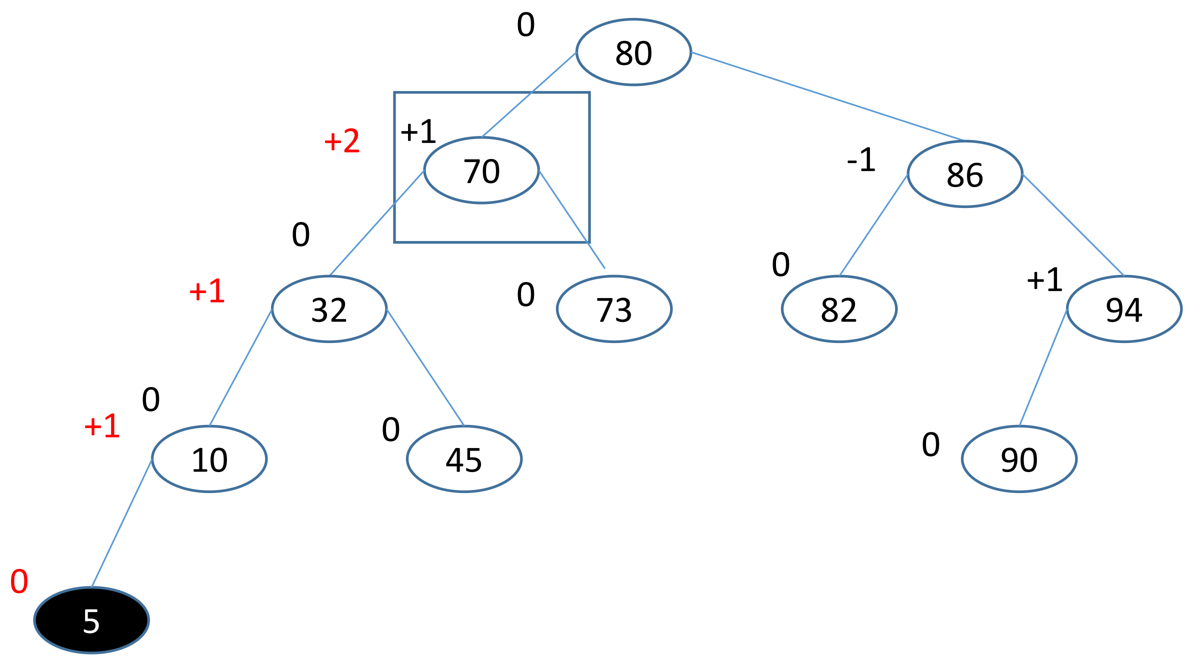
G.M. Abelson-Velskii et E.M. Landis

| Profondeur(fg(n)) – Profondeur(fd(n)) | <= 1

Ajout d’un champ balance (facteur d'équilibrage) au niveau de chaque nœud

Les arbres AVL

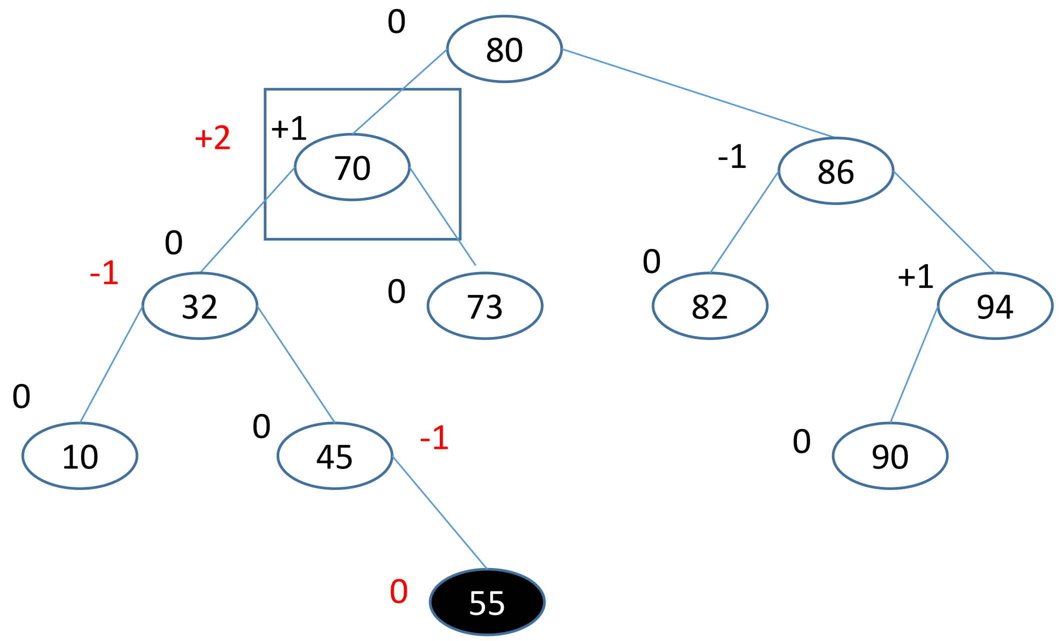
Insertion : Cas de déséquilibre



Exemple 1

Les arbres AVL

Insertion : Cas de déséquilibre

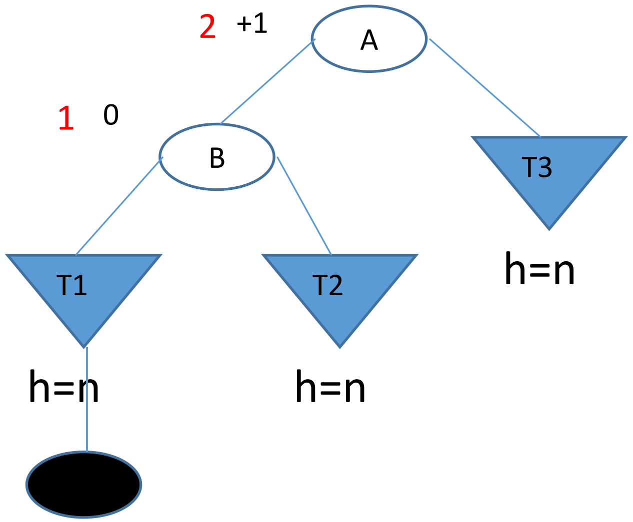


Exemple 2

Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage

Examinons un sous arbre de racine A avec un facteur d'équilibrage est +1



A possède donc au moins un noeud à sa gauche

Cas 1 : Le nouveau nœud est inséré dans le sous arbre gauche de B. Donc f(B) devient 1 et f(A) devient 2

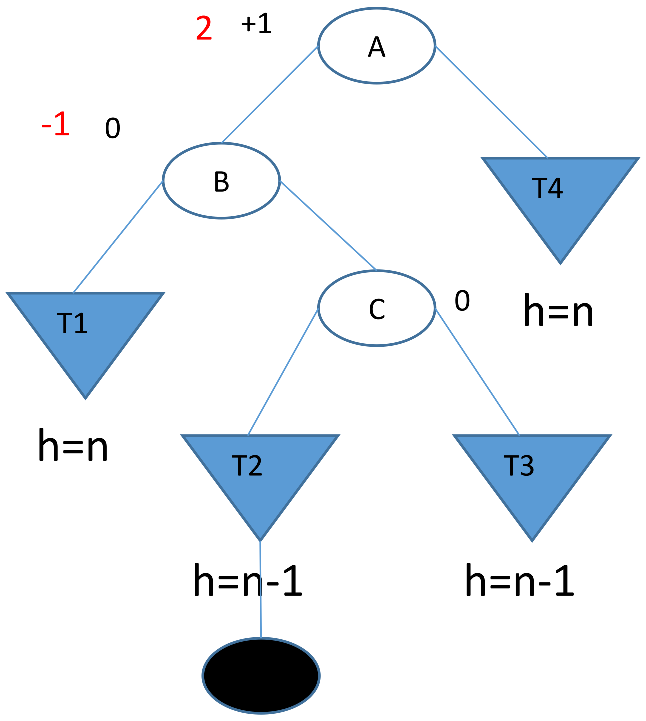
Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage

Cas 2 : Le nouveau nœud est inséré dans le sous arbre droit de B.

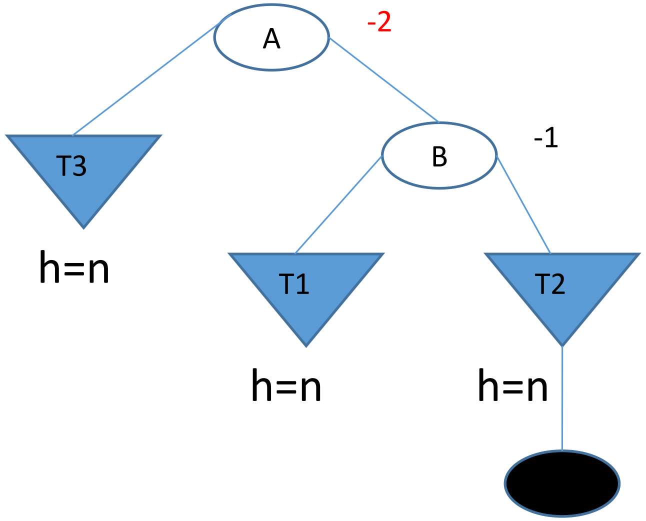
B possède donc au moins un noeud à sa droite

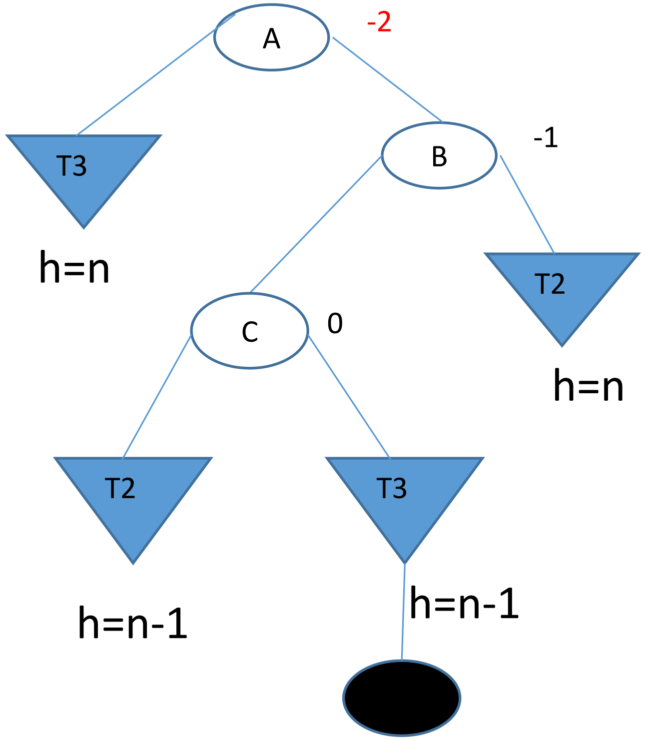
f(B) devient -1 et f(A) devient 2.



Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage





Deux cas symétriques

Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage

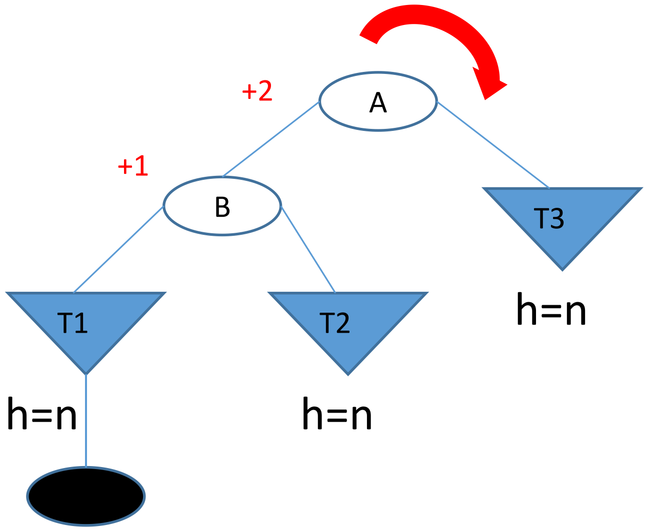
Transformer l'arbre de telle sorte que

* l'inordre soit préservé

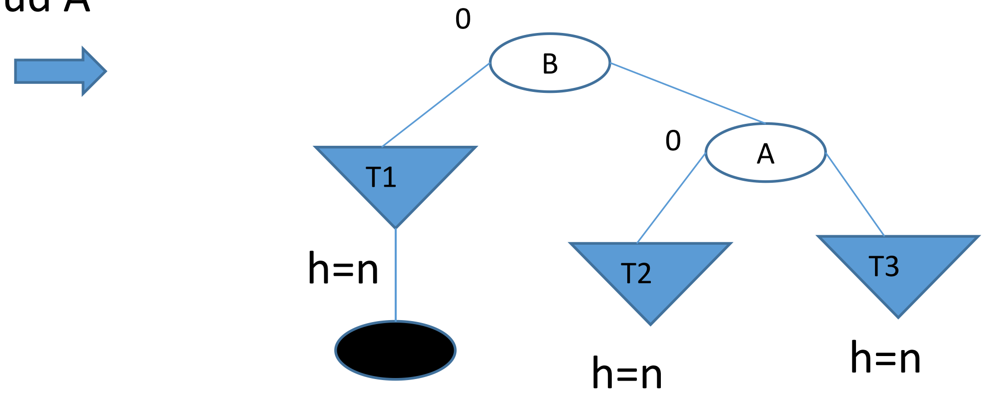
* l'arbre transformé soit équilibré

Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage



(a) rotation droite
du nœud A

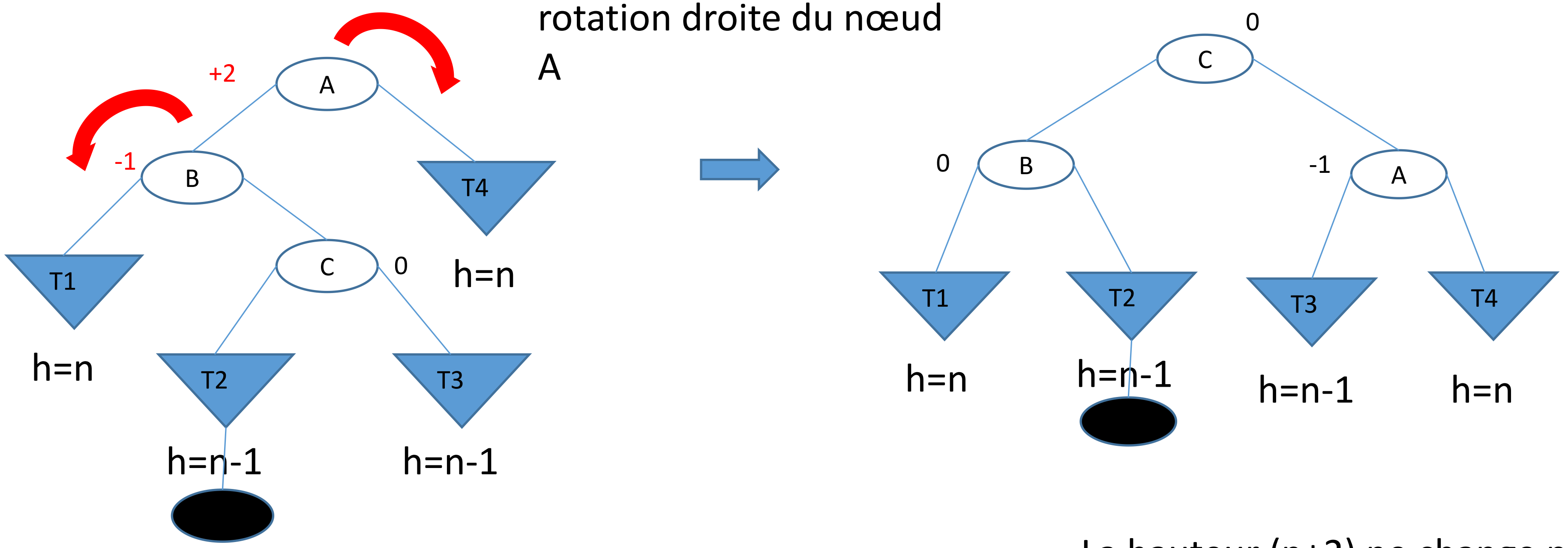


La hauteur (n+2) ne change pas, pas de cascade

Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage

(b) rotation gauche du nœud B suivie par une rotation droite du nœud A



La hauteur (n+2) ne change pas, pas de cascade

Les arbres AVL

Insertion : Technique d'équilibrage

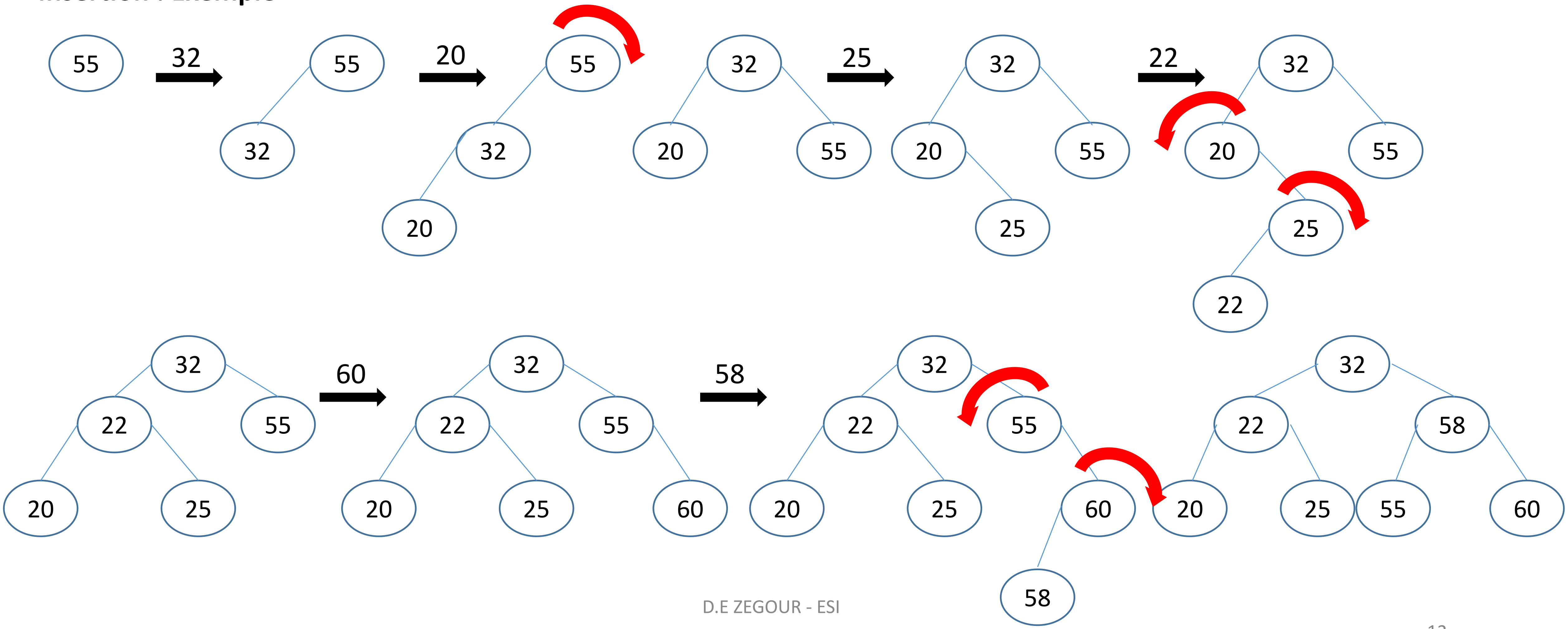
La première partie de l'algorithme consiste à insérer la donnée dans l'arbre sans tenir compte du facteur d'équilibrage

Elle garde aussi la trace du plus jeune antécédent, soit Y qui devient non équilibré

La deuxième partie fait la transformation à partir de Y

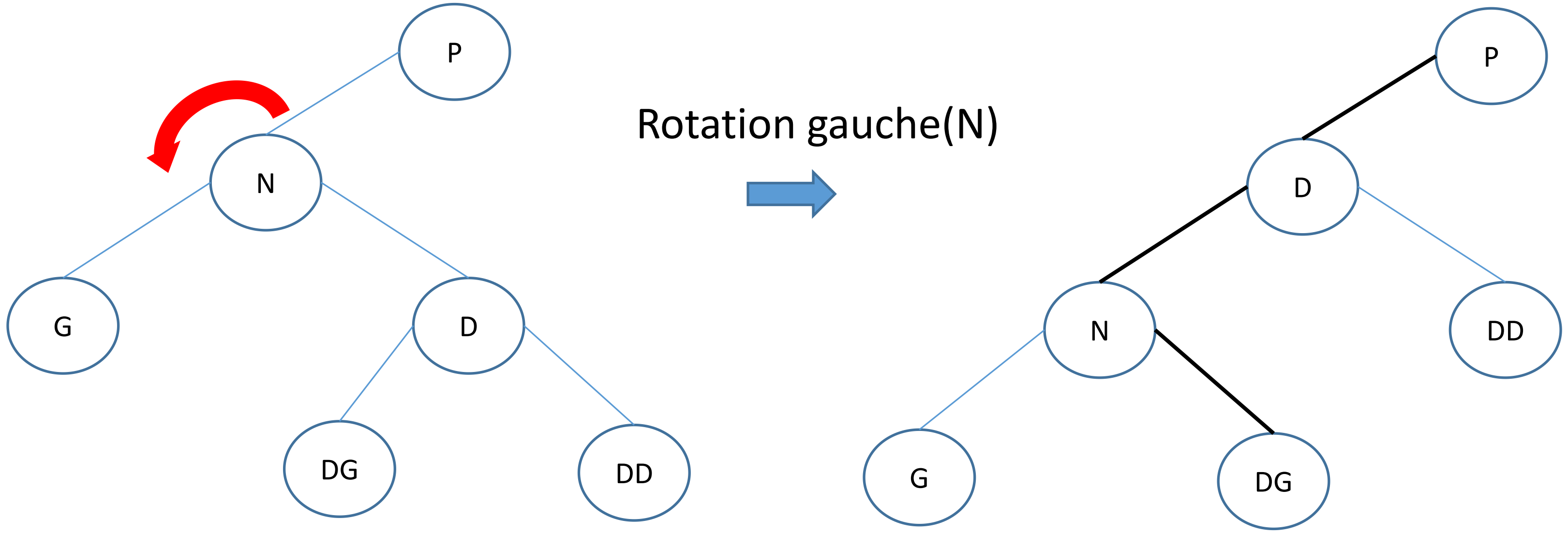
Les arbres AVL

Insertion : Exemple



Les arbres AVL

Rotation gauche : Algorithme

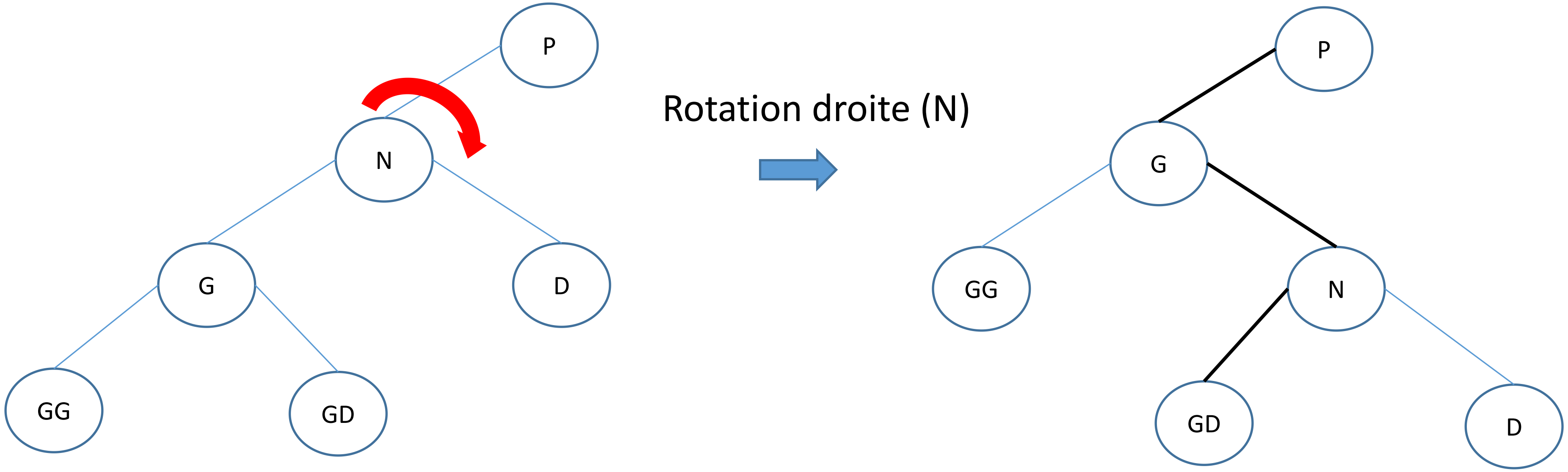


P : Parent de N

D := FD(N)   AFF_FD(N, DG)   AFF_FG(D, N))   AFF_FG(P, D)

Les arbres AVL

Rotation droite : Algorithme



P : Parent de N

G := FG(N)   AFF_FG(N, GD)   AFF_FD(G, N))   AFF_FD(P G)

Les arbres AVL

Suppression : Principe

Étape 1 : comme dans un arbre de recherche binaire ordinaire

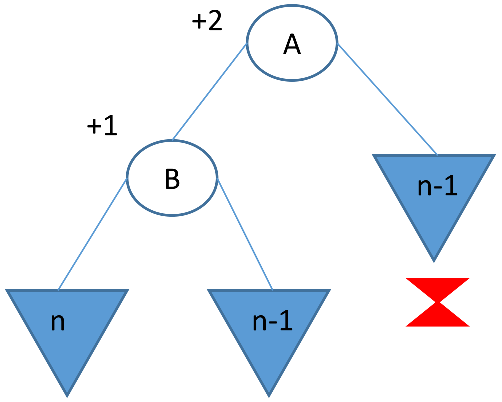
Étape 2 : mettre à jour les balances

Étape 3 : Si une balance est violée, maintenance

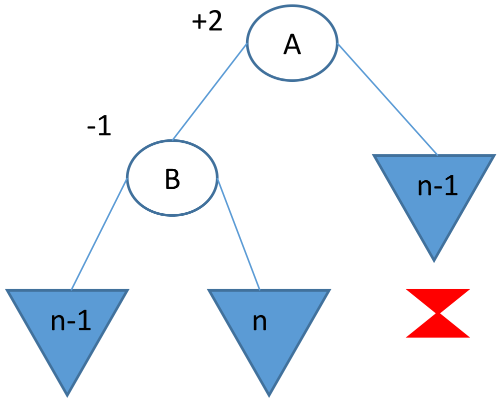
Les arbres AVL

Suppression : Technique d'équilibrage

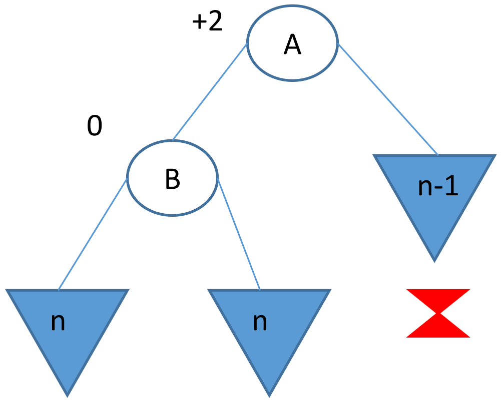
Cas où la balance d'un nœud A devient +2
→ Le fils gauche B de A doit exister



B une balance égale à + 1



B a une balance égale à -1

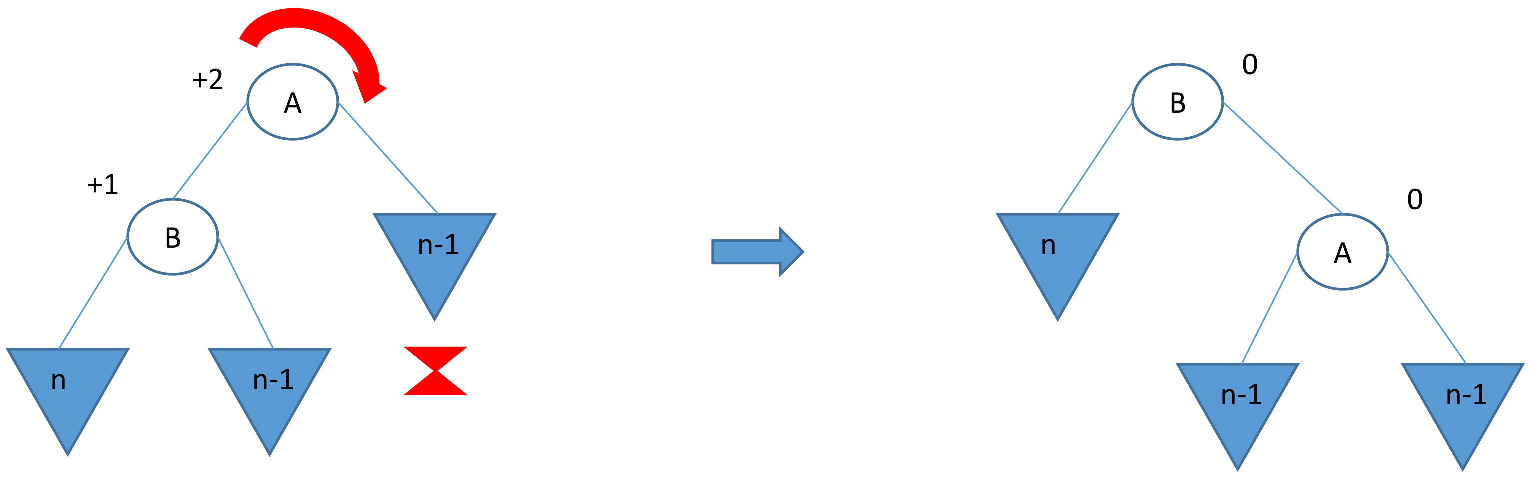


B a une balance égale à 0

Les arbres AVL

Suppression : Technique d'équilibrage

B a une balance égale à + 1

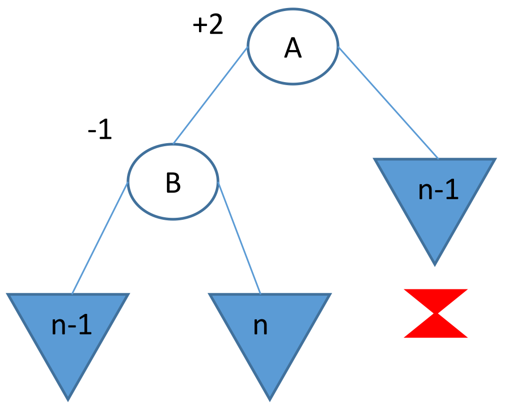


La hauteur change (de n+2 à n+1) , possible cascade

Les arbres AVL

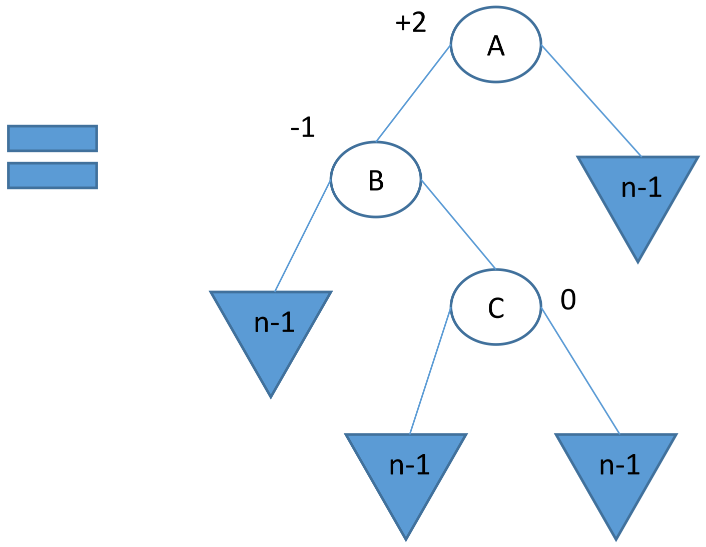
Suppression : Technique d'équilibrage

B a une balance égale à -1



B a donc un fils à sa droite, soit C.

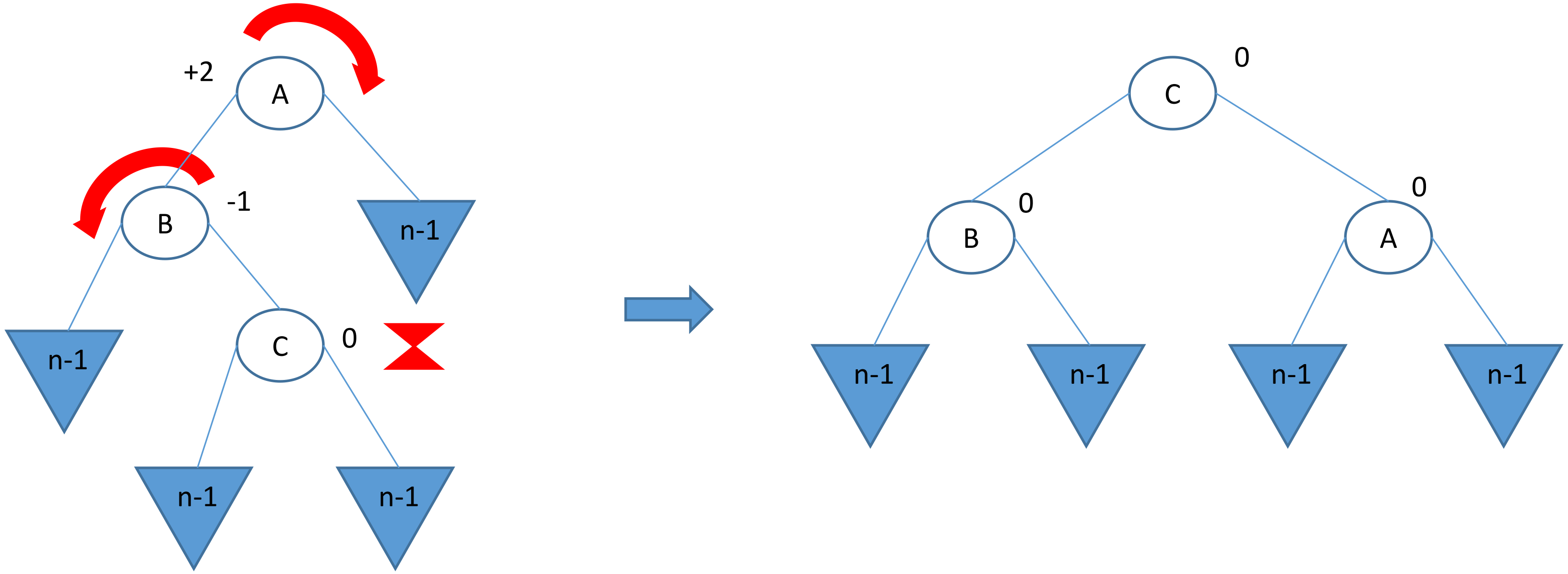
Cas Balance (C)= 0



Les arbres AVL

Suppression : Technique d'équilibrage

B a une balance égale à -1 , C son fils droit avec Balance(C)=0



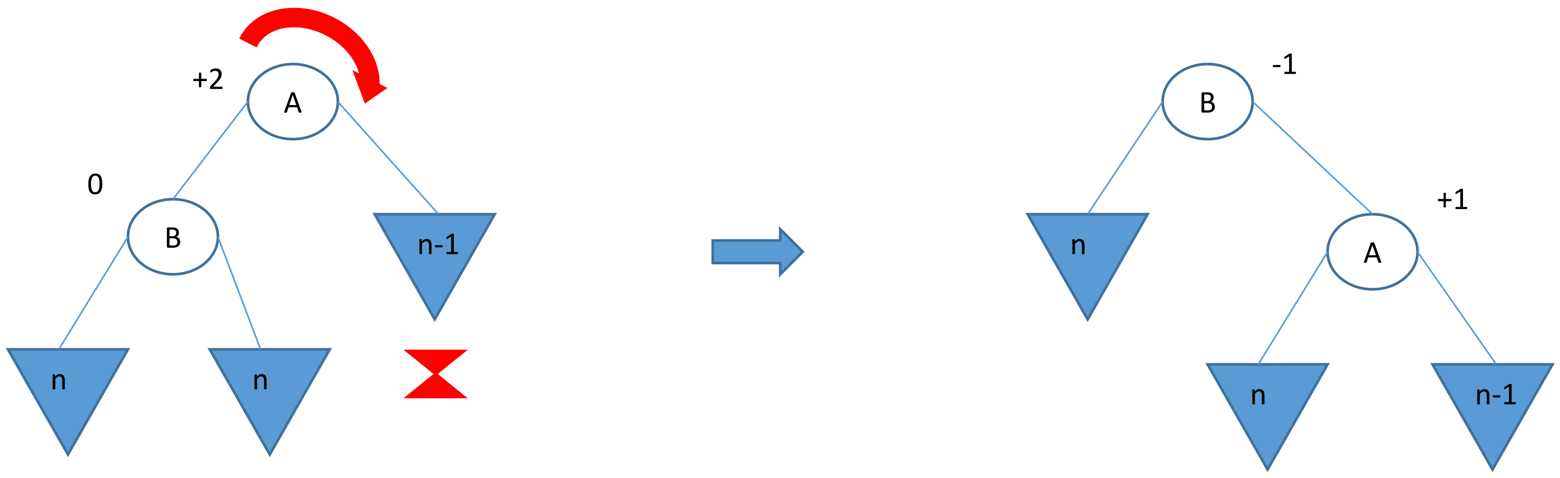
Idem pour balance(C)=+1 ou -1

La hauteur change (de n+2 à n+1) , possible cascade

Les arbres AVL

Suppression : Technique d'équilibrage

B a une balance égale à 0



La hauteur (n+2)ne change pas , pas de cascade

Les arbres AVL

Suppression : Principe

Traitement symétrique dans le cas où la balance d'un nœud A devient -2

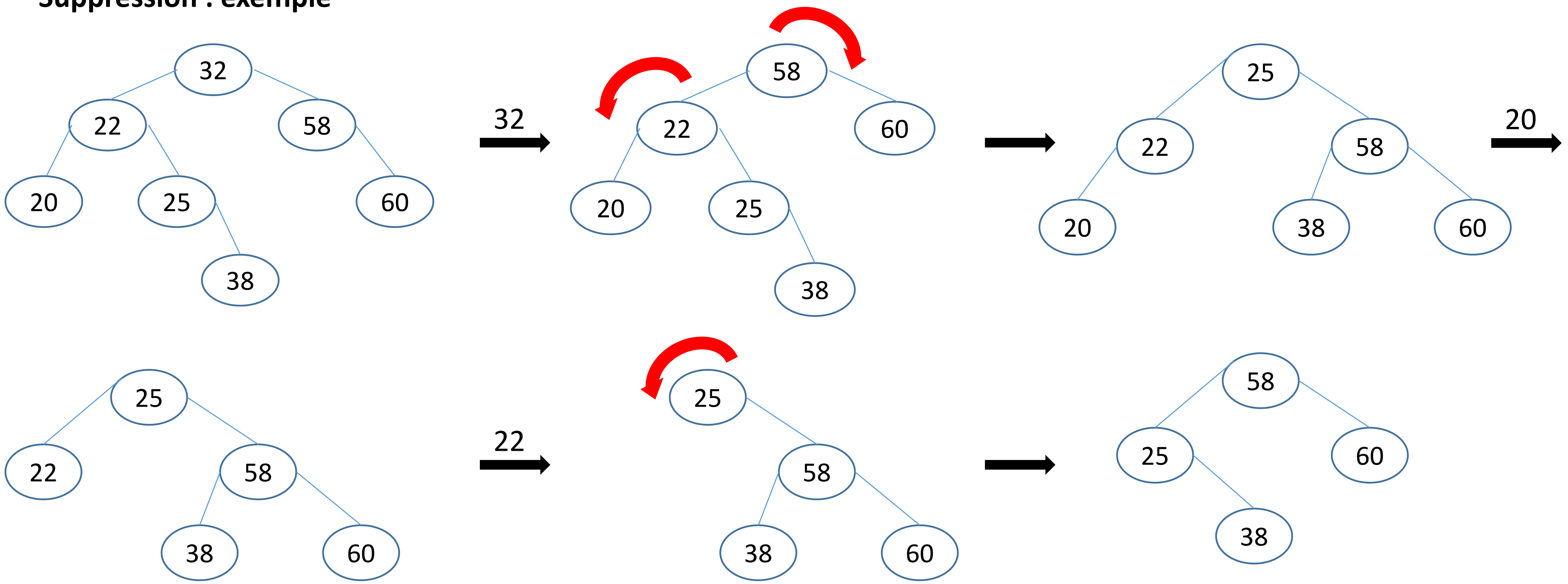
Cas où la balance d'un nœud A devient -2
→ Le fils droit B de A doit exister

Les cas suivants peuvent se présenter

a) B a une balance égale à + 1
b) B a une balance égale à – 1
c) B a une balance égale à 0

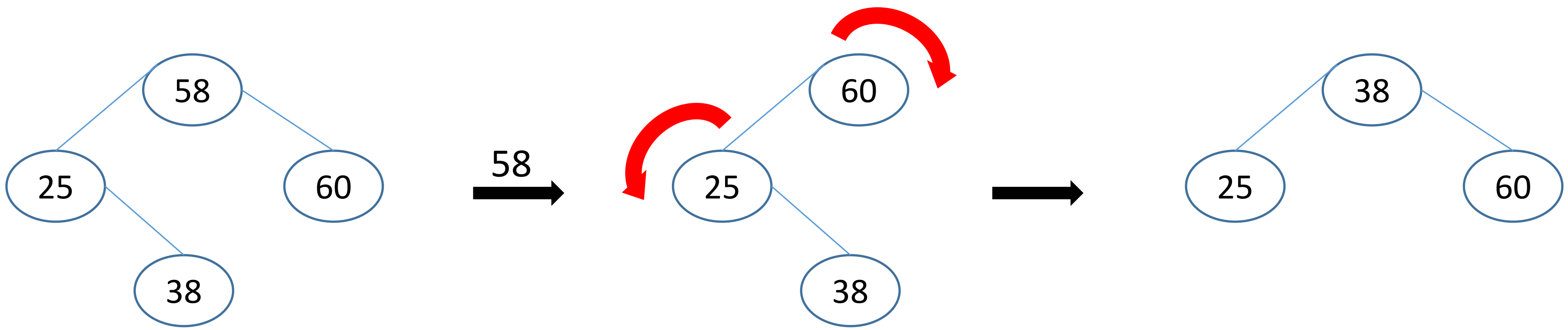
Les arbres AVL

Suppression : exemple



Les arbres AVL

Suppression : exemple



Les arbres AVL

Analyse théorique

Profondeur maximale d'un arbre binaire équilibré : $1.44*Log_2 n$

La recherche dans un tel arbre n'exige jamais plus de 44% de plus de comparaisons que pour un arbre binaire complet

Operations de maintenance :
- Restructuration = 1 rotation ou double rotation
- Insertion : au plus 1 restructuration
- suppression : au plus Log_2 (N) restructurations